

Aufgabe 21: Sphärisches Pendel

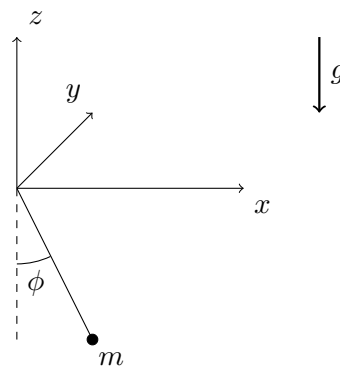
Skript: 2.5 Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen

2.7 Symmetrien und Erhaltungssätze. Noethertheorem

Literatur: Nolting Band 2 Analytische Mechanik. 1.2.2 Einfache Anwendungen

Goldstein. Klassische Mechanik. 2.6 Erhaltungssätze und Symmetrieeigenschaften

Betrachten Sie ein sphärisches Pendel im Schwerfeld. Dabei sei das Teilchen an einem Faden der Länge $l = \text{const.}$ befestigt (Siehe Skizze). Stellen Sie die Lagrangefunktion in Kugelkoordinaten auf, finden Sie zwei erste Integrale der Bewegung und integrieren Sie diese. Es wird keine Lösung der resultierenden Integrale erwartet.



Aufgabe 22: Pendel mit schwingenden Aufhängepunkt

[Skript: 2.5 Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen]

[Literatur: Nolting Band 2. 1.2.2 Einfache Anwendungen]

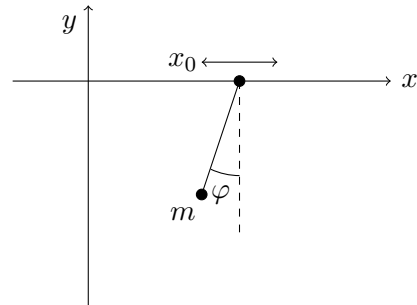
Der Aufhängepunkt x_0 eines ebenen Pendels im homogenen Schwerfeld führe auf der x -Achse harmonische Schwingungen durch

$$x_0(t) = A \cos \omega t, \quad \omega = \text{const.}$$

Der Massenpunkt habe den konstanten Abstand l vom Aufhängepunkt.

Stellen Sie die Lagrangefunktion und die entsprechenden Bewegungsgleichungen auf.

Lösen Sie diese für kleine Ausschläge und die An-



Hinweise:

- Entwickeln Sie für kleine φ , $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ jeweils bis zur ersten Ordnung in φ , d.h. die DGL sollte nur Terme der Form *const.* & φ , und Ableitungen, beinhalten.
- Die homogene DGL kann durch einen Euler-Ansatz (Vorsicht bei Vorzeichen!) oder einen Ansatz mit $\sin, \cos$ gelöst werden.
- Für die inhomogene DGL eignet sich ein Ansatz der Form der Inhomogenität.

Aufgabe 23: Seifenhaut

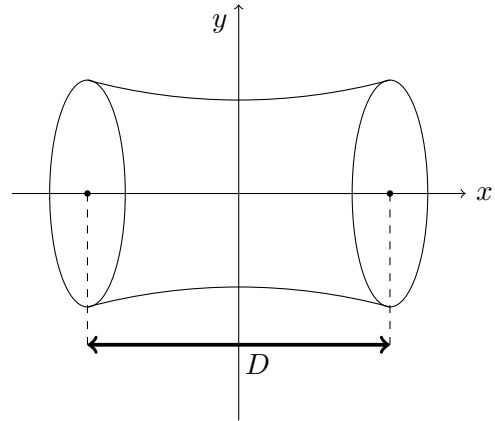
Skript: 2.3.1 Beispiel 3

2.7 Symmetrien und Erhaltungssätze. Noethertheorem

Literatur: Goldstein. Klassische Mechanik. 2.2 Zur Technik der Variationsrechnung

Gelfand, Fomin. Calculus of Variations. 1.4 The simplest variational problem

Zwischen zwei parallelen Drahtkreisen mit Radius R spanne sich eine Seifenhaut. Die Kreise stehen in Abstand D senkrecht auf der Verbindungslinie zwischen den beiden Mittelpunkten. Bestimmen Sie die Form der Seifenhaut und betrachten Sie ihr Verhalten beim langsamen Auseinanderziehen der Drahtringe.



Vernachlässigen Sie die Gravitation und gehen Sie davon aus, dass sich die Seifenhaut auf Grund der Oberflächenspannung so einstellt, dass ihre Fläche minimal wird.

Hinweise:

- Nutzen Sie 'Energieerhaltung'. Nach etwas Umformen erhalten Sie eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung.
- Eine nützliche Substitution ist $y = Cp$ mit C einer Konstante. Ebenfalls gilt $\int dp \frac{1}{\sqrt{p^2 - 1}} = \operatorname{arccosh}(p)$, der Area Kosinus Hyperbolicus (=Umkehrfunktion von $\cosh(p)$).